Comportement canonique des fonctions boréliennes sur un plan polonais

Otmar Spinas

Une partie de l'espace de Baire ${}^{\omega}\omega$ est dite *superparfaite* si elle est fermée et homéomorphe à ${}^{\omega}\omega$. Un rectangle de $({}^{\omega}\omega)^2$ est dit *superparfait* si ses deux côtés le sont. Je présente ici la canonisation de toutes les fonctions boréliennes de $({}^{\omega}\omega)^2$ vers $\mathbb{R}$ modulola restriction à un rectangle superparfait. Par le théorème de Hurewicz, ceci donne, pour tout espace polonais X non σ-compact, la canonisation des fonctions boréliennes $f : X^2 \to \mathbb{R}$ modulo la restriction à un rectangle de côtés fermés et non σ-compacts. On sait qu'unénoncé analogue est impossible en dimension supérieure ou égale à 3. Dans la suite, j'explique à quoi ressemble cette canonisation. Ce travail fait suite à [Sp1] et est présenté dans [Sp2].

Définition 1. On dit que $(x, y) \in ({}^{\omega}\omega)^2$ *oscille infiniment souvent* s'il existe une suite strictement croissante $\langle k_i : i < \omega \rangle \in {}^{\omega}\omega$ telle que $k_0 = 0$ et, pour $n < \omega$:

1. $k_{2n} = \min\{i < \omega : y(i) > \max\{k_{2n+1}, x(j) : j < k_{2n+1}\}\}$,
2. $k_{2n+1} = \min\{i < \omega : x(i) > \max\{k_{2n+2}, y(j) : j < k_{2n+2}\}\}$.

La suite $\langle k_i : i < \omega \rangle$ étant uniquement spécifiée, posons, pour $n < \omega$, $\mu_0(x, y) = \emptyset$, $\mu_{n+1}(x, y) = x \restriction k_{2n+1}$, $\nu_n(x, y) = y \restriction k_{2n}$. Notons IO l'ensemble des paires $(x, y) \in ({}^{\omega}\omega)^2$ qui oscillent infiniment souvent, et ETP (pour *even type-pairs*) l'ensemble des paires de la forme $(\mu_n(x, y), \nu_n(x, y))$, où $(x, y) \in \mathrm{IO}$ et $n < \omega$. Soit de même, OTP (pour *odd type-pairs*), l'ensemble des paires de la forme $(\mu_{n+1}(x, y), \nu_n(x, y))$, où $(x, y) \in \mathrm{IO}$ et $n < \omega$.

Définition 2. Soient c :ETP$\to 2$, d :OTP$\to 2$ quelconques. Definissons les fonctions f_c et f_d de domaine IO comme suit : Soit $(x, y) \in \mathrm{IO}$, posons $(\mu_n, \nu_n) = (\mu_n(x, y), \nu_n(x, y))$. Si $\langle(\mu_{n_k}, \nu_{n_k}) : k < N \leq \omega\rangle$ est la sous-suite des paires (μ_n, ν_n) telles que $c(\mu_n, \nu_n) = 1$, pososn $f_c(x, y) = \langle \mu_{n_k+1} : k < N \rangle$. De même, si $\langle(\mu_{n_k+1}, \nu_{n_k}) : k < N \leq \omega\rangle$ est la sous-suite des paires (μ_{n+1}, ν_n) telles que $d(\mu_{n+1}, \nu_n) = 1$, posons $f_d(x, y) = \langle \nu_{n_k+1} : k < N \rangle$.

Theorem. *Soit $f : ({}^{\omega}\omega)^2 \to \mathbb{R}$ une fonction boréleienne. Il existe une rectangle superparfait $S_0 \times S_1 \subseteq IO$ tel que l'on ait un et un seul, des cas suivants :*

1. $\forall (x, y), (x', y') \in S_0 \times S_1 \quad f(x, y) = f(x', y')$.
2. $\forall (x, y), (x', y') \in S_0 \times S_1 \quad f(x, y) = f(x', y') \Leftrightarrow x = x'$.
3. $\forall (x, y), (x', y') \in S_0 \times S_1 \quad f(x, y) = f(x', y') \Leftrightarrow y = y'$.
4. *Il existe c :ETP$\to 2$ telle que pour tous $(x, y), (x', y') \in S_0 \times S_1$ on a $c(\mu_n(x, y), \nu_n(x, y)) = 1$ pour infiniment d'entiers n and $f(x, y) = f(x', y') \Leftrightarrow f_c(x, y) = f_c(x', y')$.*
5. *Il existe d :OTP$\to 2$ telle que pour tous $(x, y), (x', y') \in S_0 \times S_1$ on a $c(\mu_{n+1}(x, y), \nu_n(x, y)) = 1$ pour infiniment d'entiers n and $f(x, y) = f(x', y') \Leftrightarrow f_d(x, y) = f_d(x', y')$.*
6. $\forall (x, y), (x', y') \in S_0 \times S_1 \quad f(x, y) = f(x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y')$.

[Sp1] **O. Spinas,** *Ramsey and freeness properties of Polish planes*, **Proc. London Math. Soc.**, to appear.

[Sp2] **O. Spinas,** *Canonical behaviour of Borel functions on superperfect rectangles*, preprint.

Address: Mathematisches Seminar, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Ludewig-Meyn-Strasse 4, 24098 Kiel, Germany
E-mail: `spinas@math.uni-kiel.de`