La théorie des ensembles au 20ème siècle

Donald Martin

C'est le premier tiers du 20ème que j'examinerai le plus en détail. L'axiomatisation formelle de la théorie des ensembles eut lieu durant cette période ; y est apparue aussi la notion itérative d'ensemble, un concept dont les axiomes de ZFC seraient l'axiomatisation. Un certain nombre d'idées fausses demeurent, concernant cette époque, en particulier des erreurs d'attribution. Les apports de Cantor et de Mirimanoff ne sont pas appréciés à leur juste valeur. Par ailleurs, Zermelo est à juste titre bien apprécié, mais ses contributions réelles ne sont pas tout à fait les mêmes que celles qui lui sont attribuées.

Les théorèmes de consistance relative de Gödel et de Cohen ont revitalisé la théorie des ensembles. Ils ont aussi soulevé des questions fondamentales portant sur l'avenir de la théorie. Les différentes lignes de recherche après Cohen peuvent être vues comme le résulat de réactions distinctes aux questions posées. Bien heureusement, de nombreuses interconnections existent entre elles. Ce qu'il y a d'unique peut-être en théorie des ensembles en cette fin de siècle, c'est que la recherche en ce domaine pourrait nous éclairer sur les questions de base concernant la nature des mathématiques. Comment pouvons-nous arriver à la vérité d'un axiome mathématique fondamental ? Toute question mathématique admet-elle une réponse bien définie ? Un ensemble tel que l'ensemble des réels est-il une totalité déterminée ou bien quelque chose d'irrémédiablement vague ?

Address: Department of Mathematics, Univ. of California at Los Angeles, Los Angeles, CA 90095-1555, USA
E-mail: dam@math.ucla.edu