Certains systèmes faibles de la théorie des ensembles

Lech Dubikajtis

En examinant, d'un point de vue syntactique, n'importe quelle logique ou un système deductif, on utilise un métalangage logique muni d'une théorie des ensembles. Il est évident, que (au moins pour les recherches syntactiques) on n'a pas besoin d'utiliser toute la théorie entière des ensembles. Le sujet de ma communication est de présenter certains systèmes axiomatiques partiels de la théorie élémentaire des ensembles de Zermelo-Fraenkel et de montrer auquel point ils peuvent être utiles pour la description précise de langage d'une théorie et de son ensemble des théorèmes.

En particulier, j'examine un système de la théorie des ensembles basé sur seuls trois axiomes:

- l'axiome d'extensionalité,
- l'axiome de l'infini,
- l'axiome de remplacement,

(sans utiliser ni l'axiome de réunion, ni l'axiome de l'ensemble des parties). On peut définir dans ce système, non seulement l'union des ensembles dénombrables, et les nombres naturelles, mais aussi l'iteration des fonctions et les opérations qui mènent aux définitions inductives (par exemple, la définition des énoncés dans les recherches syntactiques).

En ajoutant à notre théorie "faible" des ensembles un quatrième axiome (celui de la réunion), on crée un outil plus efficace pour les études syntactiques. C'est pour cette raison que je propose une legère modification de l'axiome de remplacement, laquelle permit de deduir l'existence de réunion de familles des ensembles.

Au lieu d'utiliser l'axiome

$$E(z) \to \exists w[E(w) \wedge \forall y[y \in w \leftrightarrow \exists x \in z \; y = f(x, t_1, ..., t_n)]]$$

on propose le suivant

$$E(z) \to \exists w[E(w) \wedge \forall y[y \in w \leftrightarrow \exists x \in z \; y \in f(x, t_1, ..., t_n)]]$$

Je voudrais encore souligner, que certains résultats (comme par exemple celui ci-dessus) n'étaint possibles à obtenir que grace à l'utilisation du calcule fonctionnel au lieu du calcul des prédicats (sans symboles de fonctions).

Address: Dipartimento di Matematica, Università della Calabria, 87036 Rende (CS), Italie